第５講　ベクトル

1　１辺の長さが１のひし形 ABCD において，$\angle \mathrm{BAD} > 90^\circ$ とする。直線 BC 上に，点 C とは異なる点 E を，$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}| = 1$ を満たすようにとる。以下，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{q}$ とし，$\vec{p} \cdot \vec{q} = x$ とおく。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\,x$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ は平行なので，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{p} + s\vec{q}$ と表すことができる。

$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}| = 1$ であることと，点 E は点 C と異なる点であることにより，

$s = \boxed{\text{ウエ}}\,x + \boxed{\text{オ}}$ である。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ を満たす x の値を求めよう。

(2)により，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{p} + \left(\boxed{\text{ウエ}}\,x + \boxed{\text{オ}}\right)\vec{q}$ である。$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ と $\angle \mathrm{BAD} > 90^\circ$

により，$x = \dfrac{\boxed{\text{カ}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ が得られる。

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{p} + \frac{\boxed{\text{ケ}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{q} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

である。

（次ページに続く。）

(4)　x を(3)で求めた値とし，点 F を直線 AC に関して点 E と対称な点とする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|$ を求めよう。

点 B と点 D が直線 AC に関して対称な点であることに注意すると，①により，

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{\boxed{シ}+\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}\vec{p}+\vec{q}$ と表せる。したがって，

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\dfrac{\boxed{ソタ}+\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ である。

また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|$ であり，(2)により $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\left(\boxed{ウエ}x+\boxed{オ}\right)\vec{q}$ となるので，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\dfrac{\boxed{テ}+\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}$ を得る。ゆえに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|=\boxed{ニ}$ である。

(5)　x を(3)で求めた値とし，点 R を △ABD の外接円の中心とする。$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を用いて表そう。

△ABD は AB＝AD を満たす二等辺三角形であるから，点 R は直線 AC 上にある。点 F を(4)で定めた点とし，線分 AD の中点を M とする。(4)の結果を用いることにより，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FM}}$ は垂直であることが確かめられる。よって，点 R は直線 AC と直線 FM の交点であり，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表すことができる。t を求めることにより，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{\boxed{ヌ}+\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノハ}}(\vec{p}+\vec{q})$ が得られる。

2　O を原点とする座標空間に 2 点 A$(-1,\ 2,\ 0)$，B$(2,\ p,\ q)$ がある。ただし，$q>0$ とする。線分 AB の中点 C から直線 OA に引いた垂線と直線 OA の交点 D は，線分 OA を 9：1 に内分するものとする。また，点 C から直線 OB に引いた垂線と直線 OB の交点 E は，線分 OB を 3：2 に内分するものとする。

(1)　点 B の座標を求めよう。

$|\overrightarrow{OA}|^2=$ [ア] である。また，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{[イ]}{[ウエ]}\overrightarrow{OA}$ であることにより，

$\overrightarrow{CD}=\dfrac{[オ]}{[カ]}\overrightarrow{OA}-\dfrac{[キ]}{[ク]}\overrightarrow{OB}$ と表される。$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CD}$ から

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ [ケ]　……………………………①

である。同様に，$\overrightarrow{CE}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CE}$ から

$|\overrightarrow{OB}|^2=20$　……………………………②

を得る。

①と②，および $q>0$ から，B の座標は $\left(2,\ [コ],\ \sqrt{[サ]}\right)$ である。

（次ページに続く。）

(2)　3点O，A，Bの定める平面をαとし，点$(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$をGとする。また，α上に点Hを$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$が成り立つようにとる。$\overrightarrow{OH}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$を用いて表そう。

Hがα上にあることから，実数s，tを用いて

$$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

と表される。よって

$$\overrightarrow{GH}=\boxed{\text{シ}}\,\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

である。これと，$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$および$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$が成り立つことから，$s=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，

$t=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$が得られる。ゆえに

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}\overrightarrow{OB}$$

となる。また，このことから，Hは$\boxed{\text{ツ}}$であることがわかる。

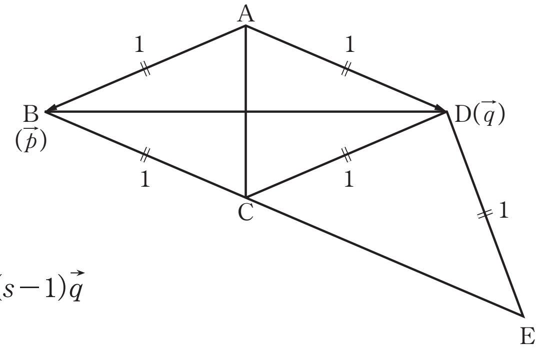
$\boxed{\text{ツ}}$の解答群

- ⓪　三角形OACの内部の点
- ①　三角形OBCの内部の点
- ②　点O，Cと異なる，線分OC上の点
- ③　三角形OABの周上の点
- ④　三角形OABの内部にも周上にもない点

第５講　ベクトル

1　$\angle\text{BAD}>90^\circ$ より $\cos\angle\text{BAD}<0$

よって，$x=\vec{p}\cdot\vec{q}<0$



(1)　$|\overrightarrow{\text{BD}}|^2=|\overrightarrow{\text{AD}}-\overrightarrow{\text{AB}}|^2=|\vec{q}-\vec{p}|^2$

$=|\vec{q}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{p}|^2$

$=1-2x+1$

$=2-2x$

(2)　$\overrightarrow{\text{DE}}=\overrightarrow{\text{AE}}-\overrightarrow{\text{AD}}=(\vec{p}+s\vec{q})-\vec{q}=\vec{p}+(s-1)\vec{q}$

$|\overrightarrow{\text{DE}}|=1$ より $|\overrightarrow{\text{DE}}|^2=1$

$|\vec{p}+(s-1)\vec{q}|^2=1^2$

$|\vec{p}|^2+2(s-1)\vec{p}\cdot\vec{q}+(s-1)^2|\vec{q}|^2=1$

$1+2x(s-1)+(s-1)^2=1$

$(s-1)(s-1+2x)=0$　　　$s=1,\ -2x+1$

点 E は点 C と異なる点であるので，$s\neq1$　　　よって，$s=-2x+1$

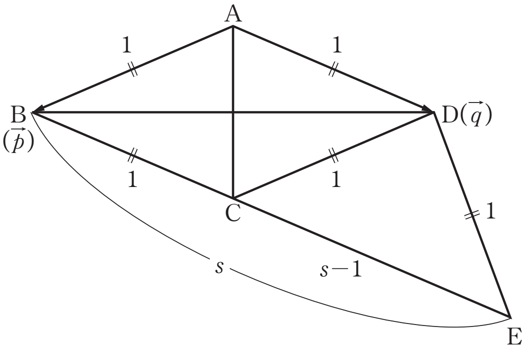
（参考）　実数 s を用いて，$\overrightarrow{\text{AE}}=\vec{p}+s\vec{q}$ と表したとき

BC：BE$=1:s$

BC$=1$ より，BE$=s$，CE$=s-1$

よって，$\overrightarrow{\text{DE}}=\overrightarrow{\text{DC}}+\overrightarrow{\text{CE}}$

$=\vec{p}+(s-1)\vec{q}$



(3)　(2)より，$\overrightarrow{\text{BE}}=s\overrightarrow{\text{AD}}=(-2x+1)\vec{q}$

$|\overrightarrow{\text{BD}}|=|\overrightarrow{\text{BE}}|$ より $|\overrightarrow{\text{BD}}|^2=|\overrightarrow{\text{BE}}|^2$

$2-2x=(-2x+1)^2|\vec{q}|^2$

$2-2x=(-2x+1)^2$

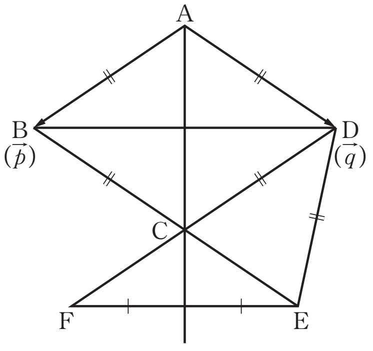
$4x^2-2x-1=0$　　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$　　$x<0$ より $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

したがって，(2)より

$$\overrightarrow{\text{AE}}=\vec{p}+(-2x+1)\vec{q}=\vec{p}+\left(-2\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}+1\right)\vec{q}=\vec{p}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}\quad\cdots\cdots①$$

(4)　x を(3)で求めた値，すなわち $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ とする。

点 F を直線 AC に関して点 E と対称な点とし，点 B と点 D が直線 AC に関して対称であることに注意すると，①で E を F に，$\vec{p}$ を $\vec{q}$ に，$\vec{q}$ を $\vec{p}$ におきかえることにより



$$\overrightarrow{\text{AF}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\vec{q}$$

と表せる。したがって，

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\vec{q}\right)-\left(\vec{p}+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}\right)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(\vec{p}-\vec{q})=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

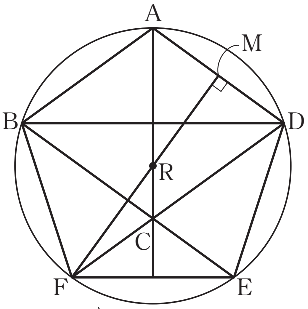
また，$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ であり，(2)より $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(-2x+1)\vec{q}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}$ であるから，

$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}\right|=\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right||\vec{q}|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに

$|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1$

(5)　x を(3)で求めた値，すなわち $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ とする。



△ABD は AB＝AD を満たす二等辺三角形であるから，△ABD の外接円の中心 R は直線 AC 上にある。点 F を(4)で定めた点とし，線分 AD の中点を M とするとき，(4)の結果より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FM}}$ は垂直であることが確かめられる。

$$\left(\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FM}}&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right)=\vec{q}\cdot\left\{\frac{1}{2}\vec{q}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\vec{q}\right)\right\}\\&=\vec{q}\cdot\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}\right)=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}-\frac{1}{2}|\vec{q}|^2\\&=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\end{aligned}\right)$$

よって，点 R は直線 AC と直線 FM の交点である。
点 R が直線 FM 上にあることから，実数 t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\vec{q}\right)+(1-t)\cdot\dfrac{1}{2}\vec{q}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{p}+\dfrac{1+t}{2}\vec{q}$

と表すことができる。
また，点 R は直線 AC 上の点であるから，実数 u を用いて
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=u\overrightarrow{\mathrm{AC}}=u(\vec{p}+\vec{q})=u\vec{p}+u\vec{q}$
と表すことができる。$\vec{p}$ と $\vec{q}$ は１次独立であることから，

$\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}t=u\\ \dfrac{1+t}{2}=u\end{cases}$　より　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}t=\dfrac{1+t}{2}$

よって，$t=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$u=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{5}}{5}}{2}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ である。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}(\vec{p}+\vec{q})$ が得られる。

2 (1) $\overrightarrow{OA}=(-1,\ 2,\ 0)$ より

$|\overrightarrow{OA}|^2=(-1)^2+2^2+0^2=5$

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

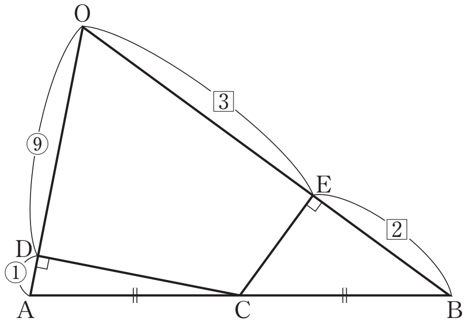
であることから

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OA}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

と表される。



$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CD}$ から $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=0$

$\dfrac{2}{5}|\overrightarrow{OA}|^2-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　　$\dfrac{2}{5}\cdot5-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

よって，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$　……①

同様に

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{OB}$

であり，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CE}$ から $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ であることから，

$\overrightarrow{OB}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{OB}\right)=0$

$-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{10}|\overrightarrow{OB}|^2=0$　　$-\dfrac{1}{2}\cdot4+\dfrac{1}{10}|\overrightarrow{OB}|^2=0$

よって，$|\overrightarrow{OB}|^2=20$　……②

$\overrightarrow{OA}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(2,\ p,\ q)$ より

①から，$-2+2p=4$　　よって，$p=3$

②から，$2^2+p^2+q^2=20$　　$4+3^2+q^2=20$　　$q^2=7$　　$q>0$ から，$q=\sqrt{7}$

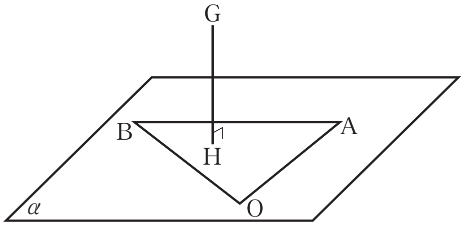
したがって，B の座標は $(2,\ 3,\ \sqrt{7})$ である。

(2) 点 H が平面 α 上にあることから，実数 s，t を用いて

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

と表される。よって，

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}=-\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$



である。これと，$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ および $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つことから，

$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より

$(-\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$　……③

$\overrightarrow{\mathrm{GH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より

$(-\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$　……④

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=-1\cdot4+2\cdot4+0\cdot(-\sqrt{7})=4$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=2\cdot4+3\cdot4+\sqrt{7}\cdot(-\sqrt{7})=13$

よって，③，④より

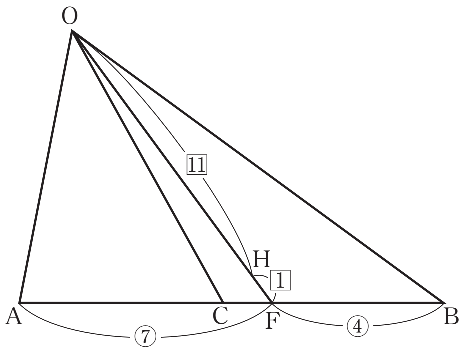
$$\begin{cases}-4+5s+4t=0\\-13+4s+20t=0\end{cases}$$　したがって，$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{7}{12}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\frac{4}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{11}{12}\left(\frac{4}{11}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{7}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

したがって，線分 AB を 7：4 に内分する点を F とすると，点 H は線分 OF を 11：1 に内分する点である。



このことから，H は三角形 OBC の内部の点（①）である。

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。